

8. Арнольд В.И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели / Изд. 2-е, стереотип. – М.: МЦНМО, 2008. 32 с.
9. Пахарьков Г.Н. Основы маркетинга на предприятиях медико-технического профиля. Уч. пособие. – СПб.: СПГЭТУ, 1995. 80 с.
10. Информационные технологии в медицине. 2011-2012 гг. – М.: Радиотехника, 2012.

Лилия Явдатовна Бухарбаева,
канд. техн. наук, д-р эконом. наук, профессор,
кафедра экономики предпринимательства,

Рашид Вильевич Насыров,
канд. техн. наук, канд. фарм. наук, доцент,
Игорь Сергеевич Тиунов,
аспирант,
кафедра автоматизации проектирования
информационных систем,
Уфимский государственный авиационный
технический университет,
г. Уфа, Республика Башкортостан,
e-mail: buharbaeva@mail.ru

А.А. Федотов

Моделирование процессов формирования периферической артериальной пульсации крови

Аннотация

Рассмотрена математическая модель процессов формирования сигнала периферической артериальной пульсации крови в сосудах верхних конечностей. Формирование периферической артериальной пульсации крови представлено в виде композиции прямой и отраженной пульсовых волн, распространяющихся по артериальной системе человека. Предложена система аналогии между процессами распространения пульсовых волн по артериальной системе человека и распространением электрических колебаний по линиям с распределенными параметрами. Зависимости распространения пульсовых волн по артериальной системе человека были получены на основе решения одномерных уравнений Навье-Стокса для нескольких частных случаев.

Одной из самых распространенных и опасных патологий сердечно-сосудистой системы человека является дисфункция эндотелия, приводящая к возникновению таких заболеваний, как атеросклероз, артериальная гипертензия, ишемическая болезнь сердца, инсульт и инфаркт. Ранняя диагностика эндотелиальной дисфункции осуществляется на основе методик оценки показателей эластичности артериальных сосудов [1], [2].

Эластические свойства артериальных сосудов могут быть косвенно определены методами контурного анализа периферической артериальной пульсации крови, регистрируемой неинвазивно с помощью плетизмографических или сфигмографических датчиков [2]-[4]. Форма контура периферической артериальной пульсации крови определяется главным образом характеристиками большого круга кровообращения, скоростью распространения пульсовых волн давления в аорте и крупных артериях, а также тонусом мелких артерий и артериол [1], [5].

Математическое моделирование гемодинамических процессов в артериальных сосудах верхних конечностей позволит открыть новые возможности в создании эффективных методик определения показателя эластичности артериальных сосудов на основе неинвазивной регистрации и обработки биосигналов артериальной пульсации крови [6], [7]. Данная статья посвящена разработке математической модели процессов формирования периферической артериальной пульсации крови, наблюдаемой в артериальных сосудах верхних конечностей.

Для описания процессов распространения пульсовых волн давления по артериальному руслу использовались одномерные уравнения Навье-Стокса [8], [9]:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = Q \cdot \frac{8\mu}{\pi r^4} + \frac{\rho}{\pi r^2} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t};$$

$$-\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{3\pi r^3}{2\xi h} \cdot \frac{\partial P}{\partial t},$$

где x – осевая координата; t – время; Q – расход жидкости; P – давление; μ – вязкость крови; r – радиус артерии; ρ – плотность жидкости; ξ – модуль Юнга артериальной стенки; h – толщина стенки.

Для получения математических зависимостей изменения давления пульсовой волны от времени и координаты воспользуемся аналогией между процессом распространения пульсовых волн по артериальному руслу и распространением электрических колебаний по одномерным линиям передачи с рас-

пределенными параметрами [6], [9]. Телеграфные уравнения, описывающие процесс распространения электрических возмущений в длинной линии без утечек (длинная линия типа «подземный кабель» [10]), имеют символическую формальную аналогию с одномерными уравнениями Навье-Стокса:

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = I \cdot R + L \cdot \frac{\partial I}{\partial t};$$

$$-\frac{\partial I}{\partial x} = C \cdot \frac{\partial U}{\partial t},$$

где U – электрическое напряжение; I – электрический ток; R – электрическое сопротивление единицы длины линии; L – индуктивность единицы длины линии; C – электрическая емкость единицы длины линии.

Таким образом, используется следующая система аналогий: электрическое напряжение $U \leftrightarrow$ давление P , электрический ток $I \leftrightarrow$ расход жидкости Q . Аналогия уравнений позволяет использовать для исследования гемодинамических процессов методы анализа, разработанные для длинных электрических линий, в частности, использовать такие понятия, как импеданс, согласованная нагрузка, линия с отражением и др.

Моделью участка артериального русла является однородная электрическая длинная линия передачи. На одном конце находится источник электрического колебания, другой конец линии замкнут на обобщенное сопротивление [6], [9]. В такой модели источник электрического сигнала моделирует импульсное изменение давления, возникающее во время систолы и приводящее к выбросу крови из левого желудочка. В качестве входного сигнала был выбран импульс с экспоненциальными фронтами как наиболее близкий к наблюдаемой форме сердечного выброса во время систолы [6]:

$$P_o(t) = P_{\max} \cdot \left[1 - e^{-\frac{t}{T_1}} - \left(1 - e^{-\frac{t-t_p}{T_2}} \right) \cdot 1(t-t_p) \right],$$

где P_{\max} – амплитуда импульса давления; T_1 – длительность переднего фронта импульса; t_p – длительность импульса; T_2 – длительность заднего фронта импульса; $1(t)$ – единичная функция.

Параметры такого сигнала имеют прямой физиологический смысл и определяются параметрами сердечного выброса

при систоле. В качестве усредненных значений будем считать, что длительность переднего фронта импульса давления $T_1 = 0,08$ с; длительность импульса давления $t_p = 0,2$ с; длительность заднего фронта импульса давления $T_2 = 0,05$ с [11].

Рассмотрим процесс формирования артериальной пульсации крови в периферических сосудах верхних конечностей. Контур артериальной пульсации крови формируется в результате взаимодействия между левым желудочком и сосудами большого круга кровообращения и отражает слияние прямой и отраженной пульсовых волн давления [5], [8], [11].

Прямая пульсовая волна давления образуется за счет систолического объема крови, передающегося напрямую от левого желудочка к пальцам верхних конечностей во время систолы. Отраженная пульсовая волна давления образуется за счет отражения объема крови, передающегося по аорте и крупным магистральным артериям к нижним конечностям и направляющегося обратно в восходящий отдел аорты и далее – к сосудам верхних конечностей [21].

Процесс формирования артериальной пульсации крови схематично представлен на рис. 1: \blacktriangleright – прямая пульсовая волна давления; \blacktriangleleft – отраженная пульсовая волна давления; \bullet – точка бедренной бифуркации аорты.

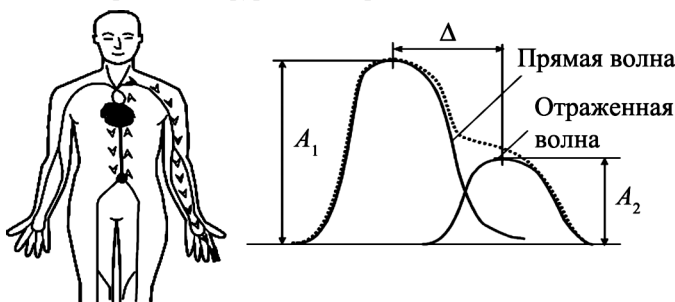


Рис. 1. Процесс формирования артериальной пульсации крови в сосудах верхних конечностей

Прямая пульсовая волна давления формируется на первом участке артериального русла: *аорта – лучевая артерия – артериола пальца*. Отраженная пульсовая волна давления формируется на втором участке артериального русла: *аорта – магистральные артерии – бедренная бифуркация аорты*. На данном участке артериального русла наблюдается отражение пульсовой волны. Интенсивность отражения (амплитуда отраженной волны A_2) определяется тонусом мелких мышечных артерий. Время отражения пульсовой волны (D) будет зависеть от эластичности магистральных артерий и протяженности второго участка артериального русла.

Таким образом, амплитудно-временные характеристики контура артериальной пульсации крови являются важными диагностическими показателями, характеризующими функциональное состояние артериальной системы человека.

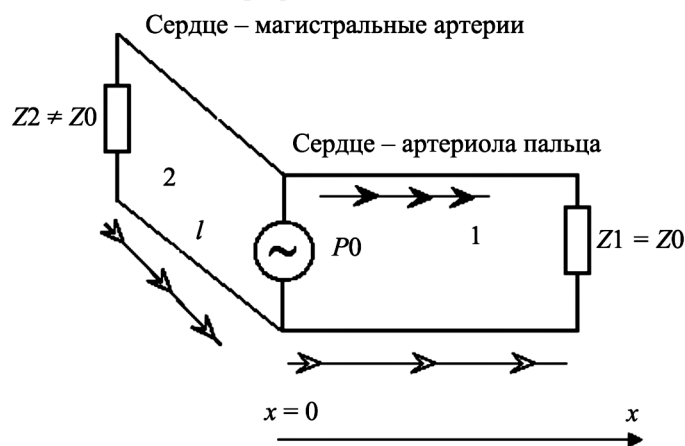


Рис. 2. Эквивалентная схема формирования артериальной пульсации крови в периферических сосудах верхних конечностей

Процесс формирования артериальной пульсации крови в сосудах верхних конечностей, на основании использования аналогии с электрической линией передачи с распределенными параметрами, можно представить эквивалентной схемой, состоящей из двух электрических линий передач, представленной на рис. 2: \blacktriangleright – прямая пульсация давления; \blacktriangleleft – отраженная пульсация давления; 1 – электрическая линия с согласованной нагрузкой; 2 – электрическая линия с несогласованной нагрузкой; Z_0 – характеристическое сопротивление линий 1 и 2; Z_1 – сопротивление нагрузки в линии 1; Z_2 – сопротивление нагрузки в линии 2. Для простоты анализа получаемых зависимостей будем считать, что параметры обоих артериальных участков, а, следовательно, и соответствующих электрических линий идентичны.

Первый участок артериального русла моделируется электрической линией передачи с согласованной нагрузкой. Второй участок артериального русла моделируется электрической линией передачи с несогласованной нагрузкой.

Решение телеграфных уравнений операторным методом для электрической линии с согласованной нагрузкой позволило получить зависимость изменения прямой пульсовой волны давления от времени и координаты для первого участка артериального русла:

$$P_1(t, x) = \int_0^t \sqrt{\frac{3\mu x^2}{\pi h r \xi \tau^3}} e^{-\frac{3\mu x^2}{h r \xi \tau}} \cdot P_0(t - \tau) d\tau.$$

Решение телеграфных уравнений операторным методом для электрической линии с отражением позволило получить зависимость изменения отраженной пульсовой волны давления от времени и координаты для второго участка артериального русла:

$$P_2(t, x) = \delta_l \int_0^t \sqrt{\frac{3\mu(x-2l)^2}{\pi h r \xi \tau^3}} e^{-\frac{3\mu(x-2l)^2}{h r \xi \tau}} \cdot P_0(t - \tau) d\tau,$$

где l – протяженность второго участка артериального русла; δ_l – коэффициент отражения пульсовой волны, изменяется от 0 до 1.

Артериальная пульсация крови, наблюдаемая в периферических сосудах верхних конечностей, образуется в результате композиции прямой и отраженной пульсовых волн, с учетом времени отражения пульсовой волны Δ :

$$P(t, x) = P_1(t, x) + P_2(t - \Delta, x).$$

Время отражения пульсовой волны обусловлено распространением отраженной пульсовой волны по второму артериальному руслу и определяется величиной временного сдвига между идентичными точками двух пульсовых волн, полученных на различных участках второго артериального русла.

На рис. 3 показаны зависимости изменения времени отражения пульсовой волны от показателя эластичности ξ при различных значениях протяженности второго артериального участка l ($1-l = 0,5$ м; $2-l = 0,35$ м; $3-l = 0,25$ м). Зависимости получены при следующих параметрах модели: $h = 1$ мм; $r = 10$ мм; $\mu = 5 \cdot 10^{-3}$ Па·с; $\delta_l = 0,5$; $T_1 = 0,08$ с; $T_2 = 0,05$ с; $t_p = 0,2$ с.

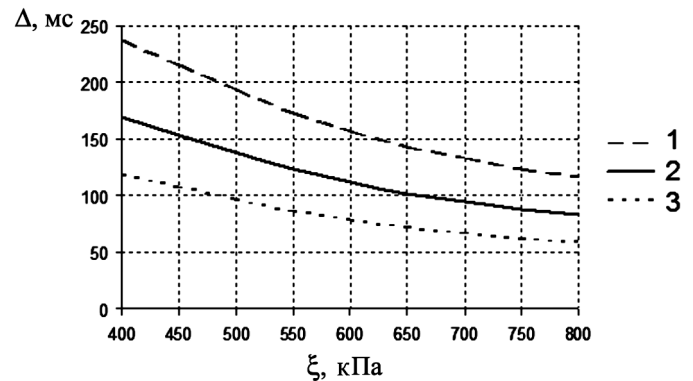


Рис. 3. Зависимости изменения времени задержки распространения отраженной пульсации давления от показателя эластичности ξ и длины l второго артериального участка

Анализ полученных зависимостей показал, что с увеличением показателя эластичности ξ (модуля Юнга артериальной стенки) время отражений пульсовой волны давления уменьшается, что полностью соответствует физиологическим наблюдениям: по ригидным (жестким) артериальным сосудам пульсовая волна распространяется быстрее [1], [5], [8].

На рис. 4 представлена композиция артериальной пульсации крови, характерной для эластичных артерий (1 – прямая пульсовая волна; 2 – артериальная пульсация крови; 3 – отраженная пульсовая волна), амплитудные характеристики пульсовых волн приведены в относительных единицах. Зависимости получены при следующих параметрах модели: $x = 0,6$ м; $l = 0,5$ м; $\xi = 400$ кПа; $h = 1$ мм; $r = 10$ мм; $\mu = 5 \cdot 10^{-3}$ Па·с; $\delta_l = 0,5$; $T_1 = 0,08$ с; $T_2 = 0,05$ с; $t_p = 0,2$ с.

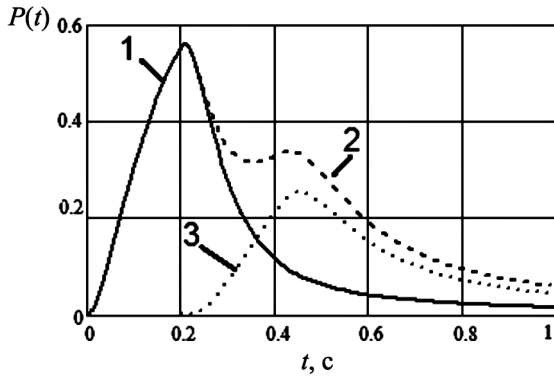


Рис. 4. Композиция артериальной пульсации крови, характерная для эластичных артерий

На рис. 5 и 6 представлены зависимости изменения артериальной пульсации крови от времени, полученные при различных значениях показателя эластичности ξ . На рис. 5: 1 – $\xi = 600$ кПа; 2 – $\xi = 400$ кПа.

Анализ полученных зависимостей показывает, что при увеличении показателя эластичности форма контура артериальной пульсации крови претерпевает значительные изменения: амплитуда увеличивается, временное расстояние между максимумами уменьшается, увеличивается наклон сигнала на начальном участке.

Для проверки адекватности предложенной модели процессов формирования сигнала артериальной пульсации крови было проведено сравнение фрагментов опорных сигналов артериальной пульсации крови, зарегистрированных у людей с различным состоянием артериального русла, и соответствующих фрагментов модельных зависимостей, полученных при различных значениях показателя эластичности. Сигналы артериальной пульсации крови были получены с помощью сертифицированного компьютерного фотоплетизмографа «Элдар», имеющего стандартные характеристики (полоса пропускания 0,05...15 Гц, разрешение АЦП – 10 бит, частота дискретизации 100 Гц).

Для верификации модели были сформированы три группы добровольцев: группа 1 состояла из 15 здоровых людей в возрас-

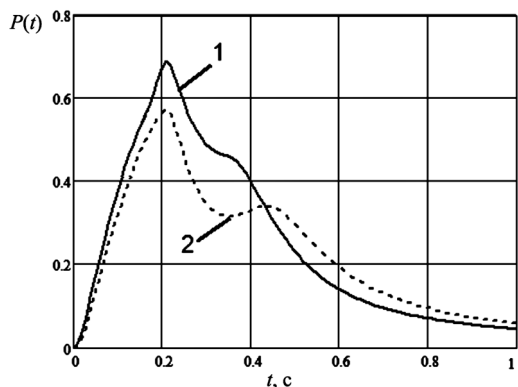


Рис. 5. Зависимости изменения артериальной пульсации крови при различных значениях показателя эластичности ξ

сте от 18 до 30 лет без заболеваний сердечно-сосудистой системы, группа 2 – из 15 людей в возрасте от 35 до 50 лет с характерными возрастными изменениями эластичности артериальных сосудов, группа 3 – из 15 людей в возрасте от 55 до 70 лет с сильно выраженными возрастными изменениями эластичности артериальных сосудов. Для нормированных опорных сигналов и нормированных модельных зависимостей артериальной пульсации крови коэффициент корреляции составил не менее 0,9 ($p < 0,05$); что позволяет сделать вывод о том, что предложенная модель адекватно описывает процесс формирования периферической артериальной пульсации крови в сосудах верхних конечностей при различных значениях показателя эластичности артериальных сосудов.

Список литературы:

1. Expert Consensus Document on arterial stiffness: Methodological issues and clinical applications // European Heart Journal. 2006. Vol. 27 (21). PP. 2588-2605.
2. Millasseau S.C., Kelly R.P. et al. Determination of age-related increases in large artery stiffness by digital pulse contour analysis // Clinical Science. 2002. Vol. 103. PP. 371-377.
3. Millasseau S.C. et al. Contour analysis of the photoplethysmographic pulse measured at the finger // Hypertension. 2006. Vol. 8. PP. 1449-1456.
4. Kelly R.P., O'Rourke M.F. Non-invasive determination of age-related changes in the human arterial pulse // Circulation. 2003. Vol. 80. PP. 1652-1659.
5. Weber T. Arterial Stiffness, Wave Reflections, and the Risk of Coronary Artery Disease // Circulation. 2004. Vol. 109. PP. 184-189.
6. Калакутский Л.И., Федотов А.А. Диагностика дисфункции сосудистого эндотелия методом контурного анализа пульсовой волны // Известия ЮФУ. Технические науки. 2009. № 9. С. 93-98.
7. Avolio A.P. Multi-branched model of the human arterial system // Medical & Biological Engineering & Computing. 1980. Vol. 18. PP. 709-718.
8. Педли Т. Механика кровообращения. – М.: Мир, 1982. 607 с.
9. John L.R. Forward electrical transmission line model of the human arterial system // Medical & Biological Engineering & Computing. 2004. Vol. 42. PP. 312-320.
10. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: Наука, 1965. 780 с.
11. Шмидт Р. Физиология человека. Т. 3-й. – М.: Мир, 1996. 313 с.

Александр Александрович Федотов,
канд. техн. наук, доцент,
кафедра радиотехники и
медицинских диагностических систем,
Самарский государственный аэрокосмический
университет им. акад. С.П. Королева
(Национальный исследовательский университет),
г. Самара,
e-mail: fedoaleks@yandex.ru

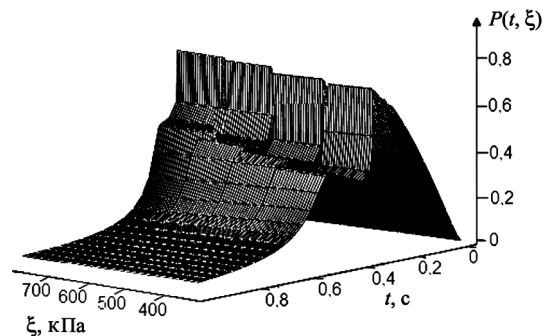


Рис. 6. Зависимости изменения артериальной пульсации крови от времени и показателя эластичности